Visoka tehnička škola strukovnih studija u Nišu

MEHANIKA 2
KINEMATIKA

KRETANJE PO KRIVOLINIJSKOJ (KRUŽNOJ) PUTANJI

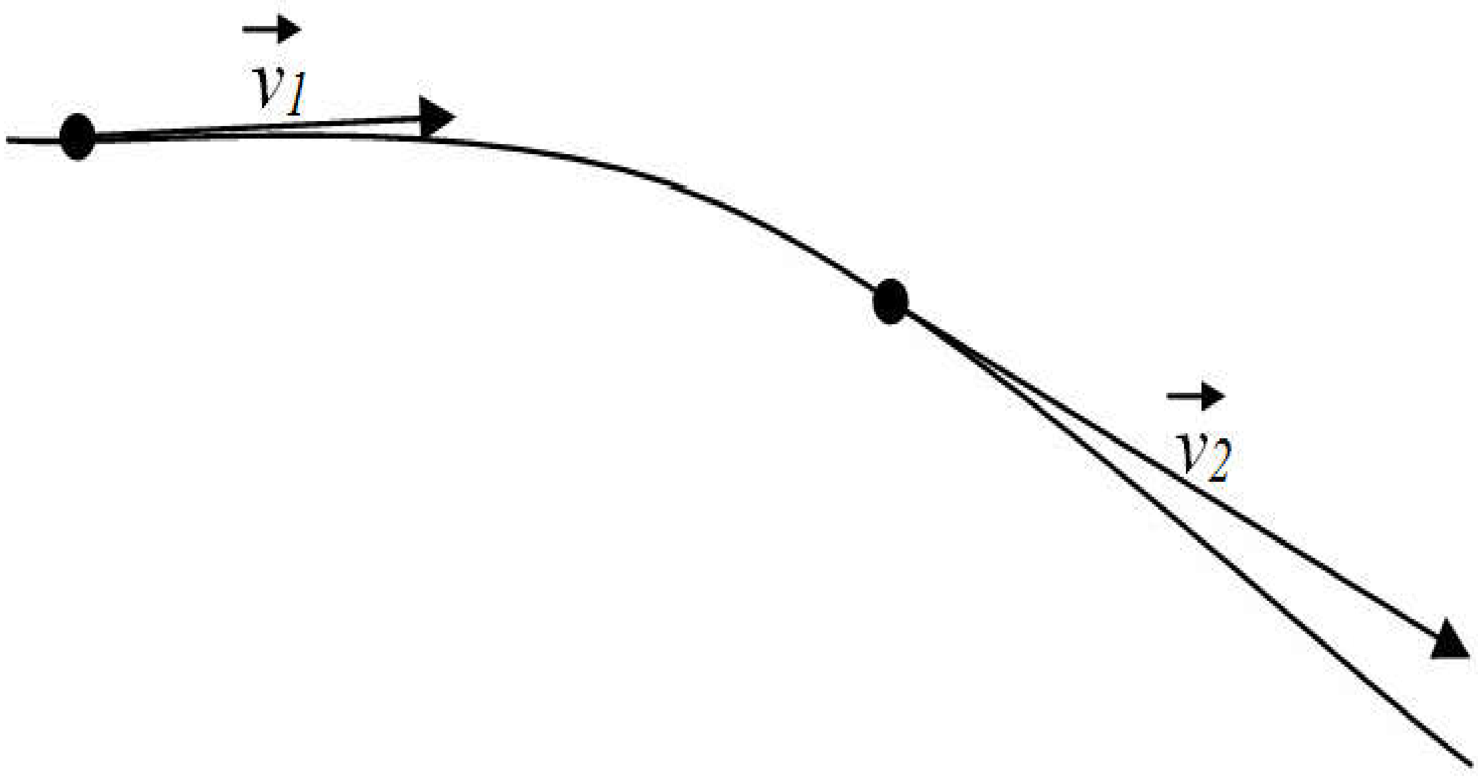
dr Boban Cvetanović

BRZINA KRETANJA TAČKE PO KRIVOLINIJSKOJ PUTANJI

Pri kretanju tačke po **pravolinijskoj putanji, vektor brzine se poklapa sa pravcem pravolinijske putanje**.

Pri kretanju **po krivolinijskoj putanji, putanja stalno menja pravac pa se i pravac brzine stalno menja**.

Pri kretanju tačke po krivolinijskoj putanji, brzina uvek ima pravac tangente na putanju u posmatranoj tački, a smer je isti kao i smer kretanja.



Da bi se znala brzina u posmatranoj tački mora se znati

zakon brzine (za intenzitet brzine) i **putanja** (za pravac brzine)

Zakon brzine je jednačina koja uspostavlja vezu između brzine i proteklog vremena $v=f(t)$

KRUŽNO KRETANJE TAČKE

To je jedno od najčešćih i najvažnijih, a istovremeno najprostije kretanje po krivolinijskoj putanji.

Pojmovi koji su karakteristični za ovo kretanje su:

ugaona brzina i ugaono ubrzanje.

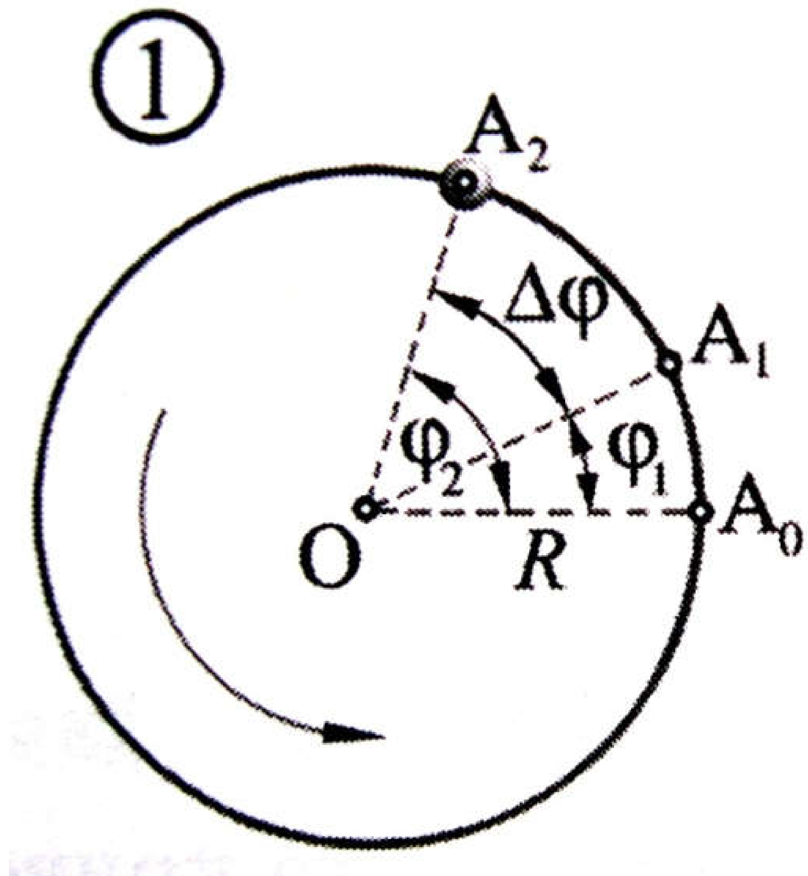
Ako je **ugaona brzina stalna** u toku kretanja radi se **o jednolikom kretanju**,

a **ukoliko se menja** onda je u pitanju **promenljivo** (jednakoubrzano ili jednakousporeno) kružno kretanje.

UGAONA BRZINA

Posmatra se kružno kretanja tačke A oko ose koja prolazi kroz tačku O.

Posle vremena t_1 ona opisuje centralni ugao φ_1, a posle vremena t_2 ugao φ_2 odnosno za vremenski period $\Delta t = t_2 - t_1$ prelazi se centralni ugao $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.



Srednja ugaona brzina je odnos pređenog centralnog ugla $\Delta\varphi$ i odgovarajućeg vremenskog perioda Δt:

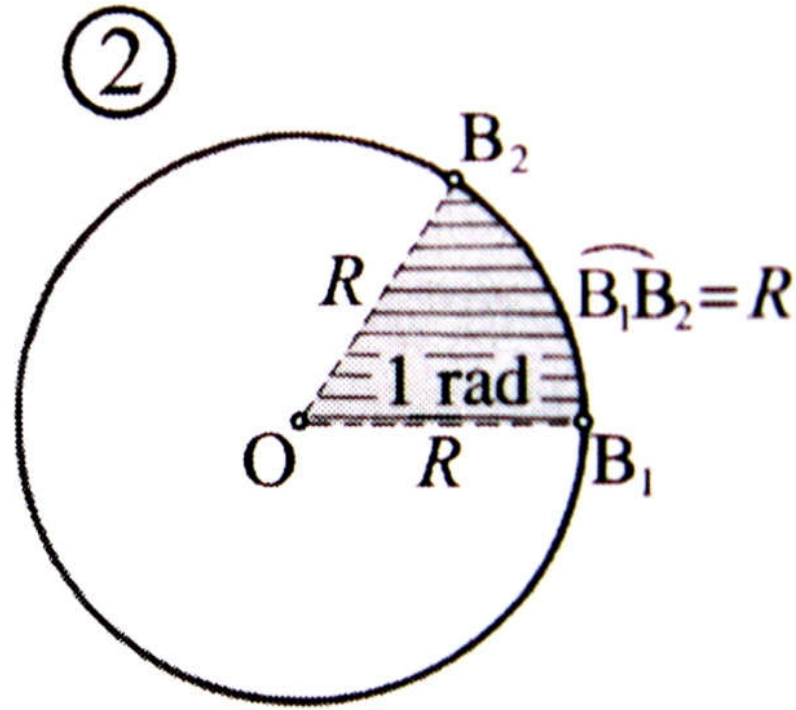
$$\omega_{sr} = \Delta\varphi / \Delta t$$

Ako vremenski period Δt teži nuli dobija se granična veličina koja se naziva **trenutna ugaona brzina** ili samo **ugaona brzina (ω).**

Ugaona brzina jednolikog kružnog kretanja tačke je pređeni centralni ugao u jedinici vremena:

$$\boldsymbol{\omega = \varphi / t}$$

Pređeni centralni ugao meri se radijanima.
Jedan radijan je centralni ugao koji zatvara luk dužine poluprečnika



Veza između ugla u radijanima i ugla u stepenima je:

$$\varphi^{o} = (180/\pi) \cdot \varphi$$

ili **1rad=57,2958º**

Ugaona brzina je vektorska veličina , a jedinica joj je rad/s ili s^{-1}.

U tehnici se često ugaona brzina zamenjuje **brojem obrtaja (n) i jedinicom o/min.**

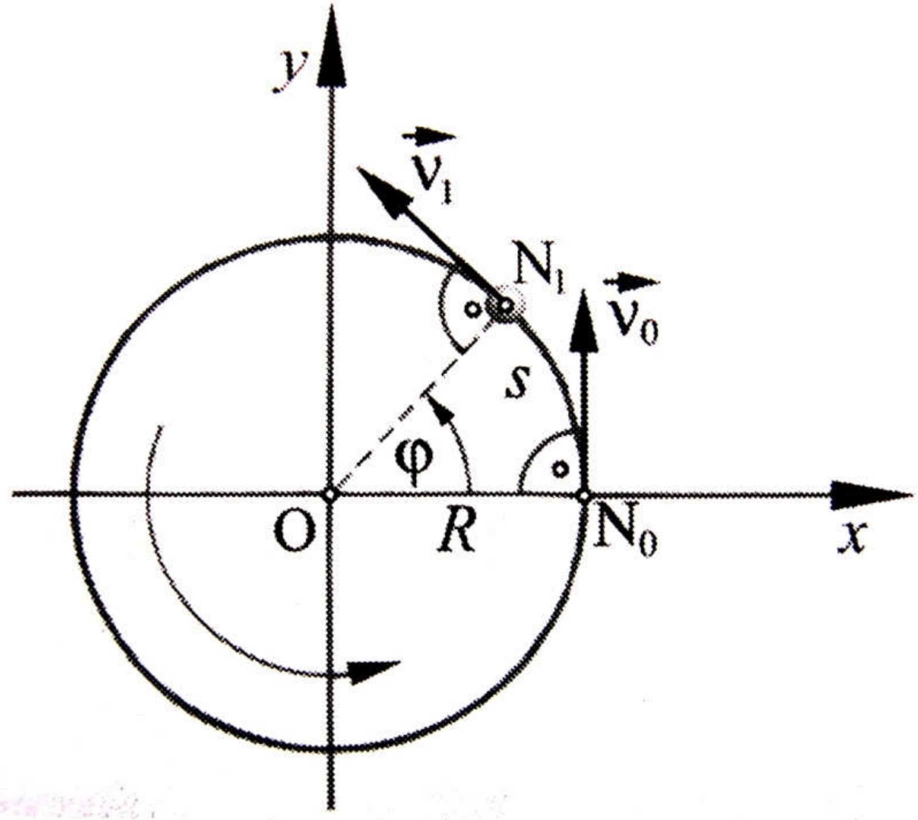
JEDNOLIKO KRUŽNO KRETANJE TAČKE

To je kretanje tačke po putanji oblika kružnice pri čemu **u jednakim vremenskim intervalima tačka prelazi jednake puteve.**

Brzina tačke koja se kreće jednoliko je stalna tokom kretanja i iznosi: v=s/t.

Pri kružnom kretanju tačka prelazi lučne puteve s=R·φ pa je

v=R·φ / t → **v = R · ω.**



Obimna brzina jednaka je proizvodu poluprečnika kružne putanje R i ugaone brzine ω.

v = R · ω.

Veza između obimne brzine (v) i broja obrtaja u minuti (n):

$$v = 2R\pi \cdot n / 60 = R\pi \cdot n / 30$$

Veza između
ugaone brzine (ω) i broja obrtaja u minuti (n):

$$\omega = \pi \cdot n / 30$$

Pri opisivanju kružnog kretanja koristi se i **period rotacije**, a to je vreme za koje tačka izvrši jedan obrtaj:

$$\omega = \varphi / t \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{t = \varphi / \omega}$$

Tačka **pri jednom obrtaju** pređe ugao 2π za vreme t pa je:

$$\boldsymbol{t = 2\pi / \omega = 60 / n}$$

Recipročna vrednost perioda rotacije naziva se **frekvencija** ili učestalost:

$$\boldsymbol{f = 1 / t = \omega / 2\pi}$$

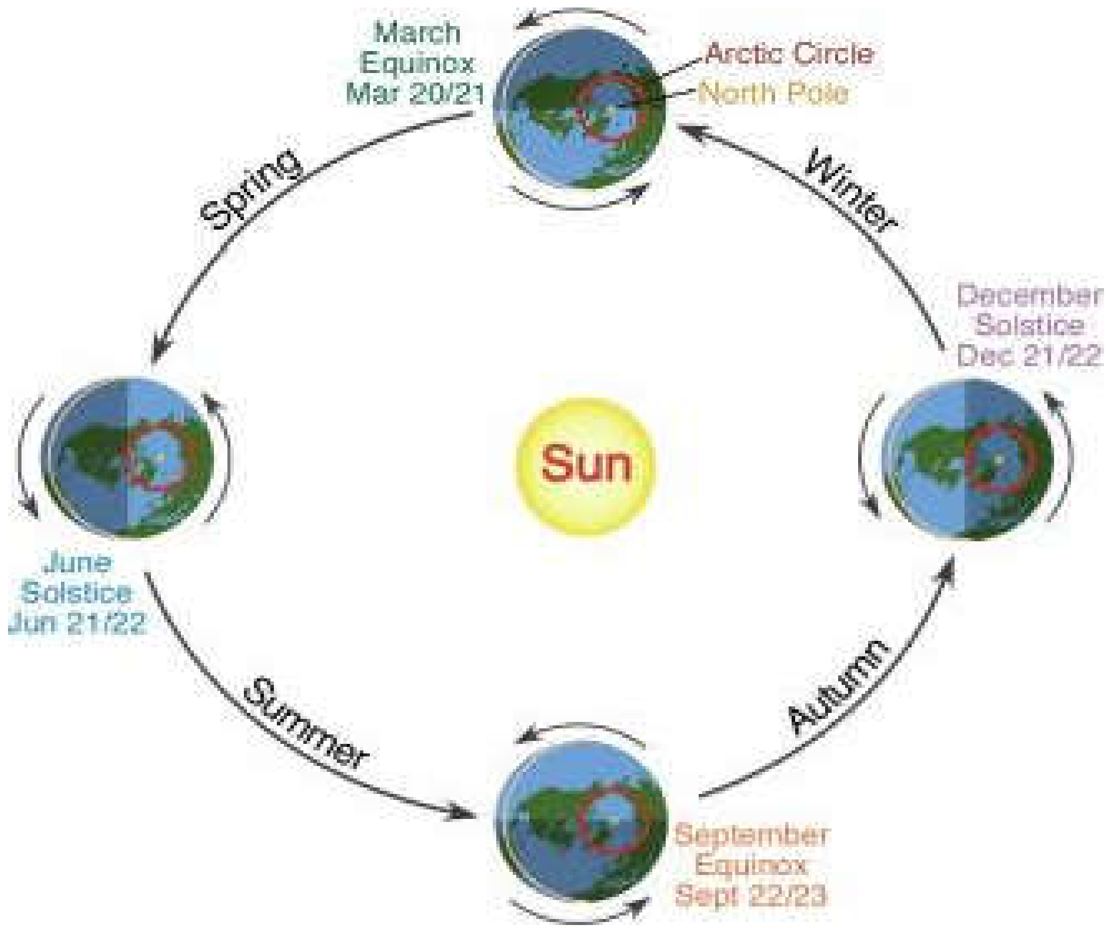
Zadatak

Točak bicikla, prečnika 0.688 m (27''), učini 120 obrtaja u minuti. Kojom se brzinom kreće bicikl, pod uslovom da se kreće jednoliko?

Rešenje: v=4,32m/s=15,55km/h

Zadatak

Poluprečnik putanje Zemlje oko Sunca (putanja se aproksimira kao kružna) iznosi $1{,}5 \times 10^{8}$km, a Zemlja je obiđe za 365 dana. Koliko iznosi brzina Zemlje?



UGAONO UBRZANJE

Neka u trenutku t_1 tačka ima ugaonu brzinu ω_1, a u trenutku t_2 ugaonu brzinu ω_2. Ako je $\omega_2 > \omega_1$ onda je u toku vremenskog perioda $\Delta t = t_2 - t_1$ priraštaj ugaone brzine $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

Srednje ugaono ubrzanje je odnos priraštaja ugaone brzine $\Delta\omega$ i odgovarajućeg vremenskog perioda Δt:

$$\alpha_{sr} = \Delta\omega / \Delta t$$

Ako vremenski interval **Δt teži nuli** dobija se granična vrednost srednjeg ugaonog ubrzanja koje se zove trenutno ugaono ubrzanje (ili samo **ugaono ubrzanje**).

Ugaono ubrzanje je vektorska veličina, a jedinica je **rad/s^2** ili **s^{-2}.**

Ugaono ubrzanje je odnos ugaone brzine i vremena

$\alpha = \omega / t$

Na osnovu ugaonog ubrzanja može se zaključiti o kakvom kretanju je reč:

1. **$\alpha=0$ → jednoliko kružno**

2. **$\alpha=const.$ → jednakopromenljivo kružno (jednakoubrzano ili jedankousporeno)**

3. **$\alpha\neq const.$ → nejednakopromenljivo kružno**

JEDNAKOUBRZANO KRUŽNO KRETANJE TAČKE

To je kretanje tačke po kružnici pri čemu se **ugaona brzina tačke povećava u svakoj sledećoj jedinici vremena uvek za istu vrednost.**

Vrednost za koju se ugaona brzina povećava je ugaono ubrzanje α (pri čemu je α =const.).

Ovo kretanje **može biti sa početnom brzinom ili bez nje**.

Opšti obrazac za izračunavanje ugaone brzine ovog kretanja:

$$\boxed{\omega=\omega_0+\alpha t}$$

Iz ove j-ne mogu se odrediti ω, ω_0, α i t ako su poznate ostale tri veličine:

***Početna ugaona brzina*: $\omega_0 = \omega - \alpha t$**

***Vreme kretanja tačke*: $t = (\omega - \omega_0)/\alpha$**

***Ugaono ubrzanje tačke*: $\alpha = (\omega - \omega_0)/t$**

Srednja ugaona brzina dobija se kao aritmetička sredina:

$$\omega_{sr} = (\omega_0 + \omega)/2$$

Centralni ugao φ koji je tačka prešla u toku vremena t:

$$\varphi = \omega_{sr} \cdot t$$

Kombinacijom j-na dobija se pređeni centralni ugao:

$$\varphi=\omega_0 \cdot t+(\alpha \cdot t^2)/2$$

Ako je $\varphi_0 \neq 0$ onda je φ:

$$\varphi=\varphi_0+\omega_0 \cdot t+(\alpha \cdot t^2)/2$$

Razlika kvadrata ugaonih brzina:

$$\omega^2-\omega_0^2=2 \cdot \alpha \cdot \varphi$$

Pređeni put: $\mathbf{s=R \cdot \varphi=R(\omega_0 \cdot t+\alpha \cdot t^2/2)}$

Obimna brzina: $\mathbf{v=R \cdot \omega=R(\omega_0+\alpha \cdot t)}$

Ako tačka kreće iz **stanja mirovanja** ($\omega_0=0$) osnovne kinematičke j-ne dobijaju oblik:

$$\omega=\alpha\cdot t\ ,$$

$$\varphi=\alpha\cdot t^2/2,$$

$$\omega^2=2\cdot\alpha\cdot\varphi,$$

$$s=R\cdot\alpha\cdot t^2/2,$$

$$v=R\cdot\alpha\cdot t$$

JEDNAKOUSPORENO KRUŽNO KRETANJE TAČKE

To je kretanje tačke po kružnici pri čemu se **ugaona brzina tačke smanjuje u svakoj sledećoj jedinici vremena uvek za istu vrednost**.

Vrednost za koju se ugaona brzina smanjuje je ugaono usporenje α (pri čemu je α=const.).

Ovo kretanje **mora biti sa početnom ugaonom brzinom!!!**

Kinematičke j-ne jednakousporenog kretanja razlikuju se od j-na jednakoubrzanog kretanja samo u znaku **-**.

$$\omega=\omega_0-\alpha t$$

$$\varphi=\omega_0 \cdot t-(\alpha \cdot t^2)/2$$

$$v=R(\omega_0-\alpha \cdot t)$$

$$s=R(\omega_0 \cdot t-\alpha \cdot t^2/2)$$

$$\omega_0^2-\omega^2=2 \cdot \alpha \cdot \varphi$$

1. **Kada se tačka kreće jednakousporeno zaustaviće se posle t_k sekundi (vreme zaustavljanja ili kočenja): $t_k=\omega_0/\alpha$**

2. **Ugao zaustavljanja: $\varphi_k=\omega_0^2/2\cdot\alpha$ (rad)**

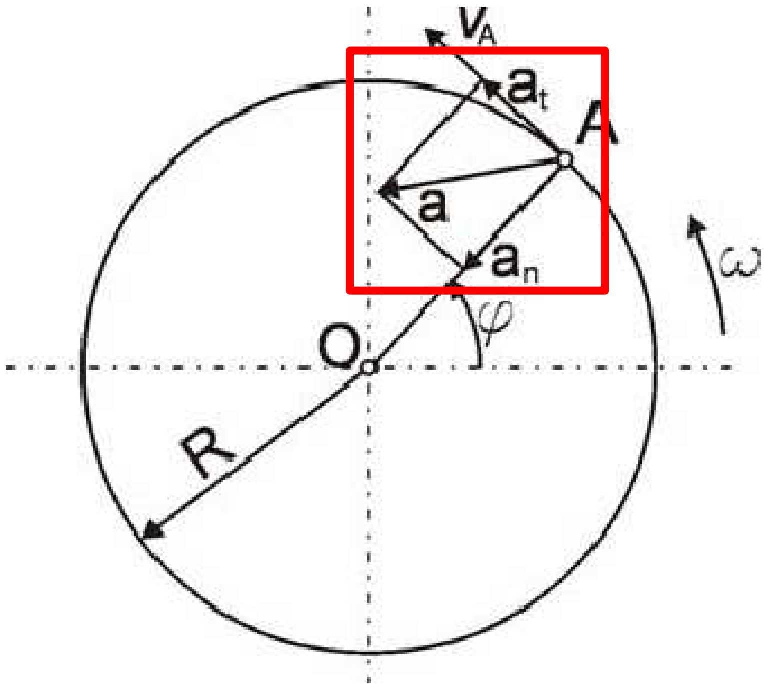
3. **Broj obrtaja do zaustavljanja: $N_k=\varphi_k/2\pi$ (obrt)**

4. **Pređeni put do zaustavljanja: $s_k=R\cdot\omega_0^2/2\cdot\alpha$**

UBRZANJE KRUŽNOG KRETANJA TAČKE

Ubrzanje kretanja po krivolinijskoj putanji, može se odrediti određivanjem komponenata ubrzanja.

Vektor ubrzanja ***a*** razlaže se u prirodnom koordinatnom sistemu na pravac tangente T (***tangencijalno ubrzanje*** $\boldsymbol{a_T}$) i pravac normale N (***normalno ubrzanje*** $\boldsymbol{a_N}$).



Normalno ubrzanje jednako je količniku kvadrata obimne brzine i poluprečnika kružne putanje, a pada u pravcu poluprečnika sa smerom ka centru obrtanja:

$a_N = v^2/R = R \cdot \omega^2$ (jer je $v = R \cdot \omega$)

Normalno ubrzanje jednolikog kružnog kretanja je ujedno celo ubrzanje jer je tangencijalno ubrzanje ovde jednako nuli jer je obimna brzina konstanta!!!

Tangencijalno ubrzanje je jednako proizvodu poluprečnika putanje i ugaonog ubrzanja i pada u pravcu tangente na putanju:

$$a_T = R \cdot \alpha$$

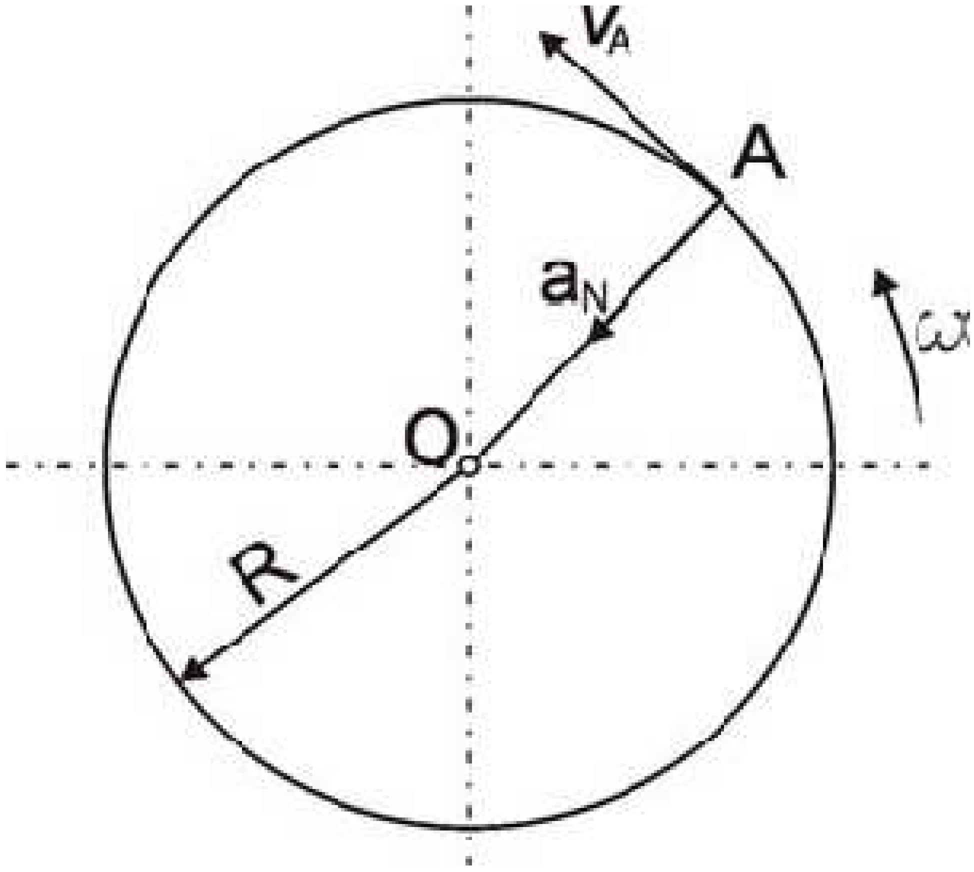
***Ukupno ubrzanje*:**

$$a = (a_T^2 + a_N^2)^{1/2} = R(\alpha^2 + \omega^4)^{1/2}$$

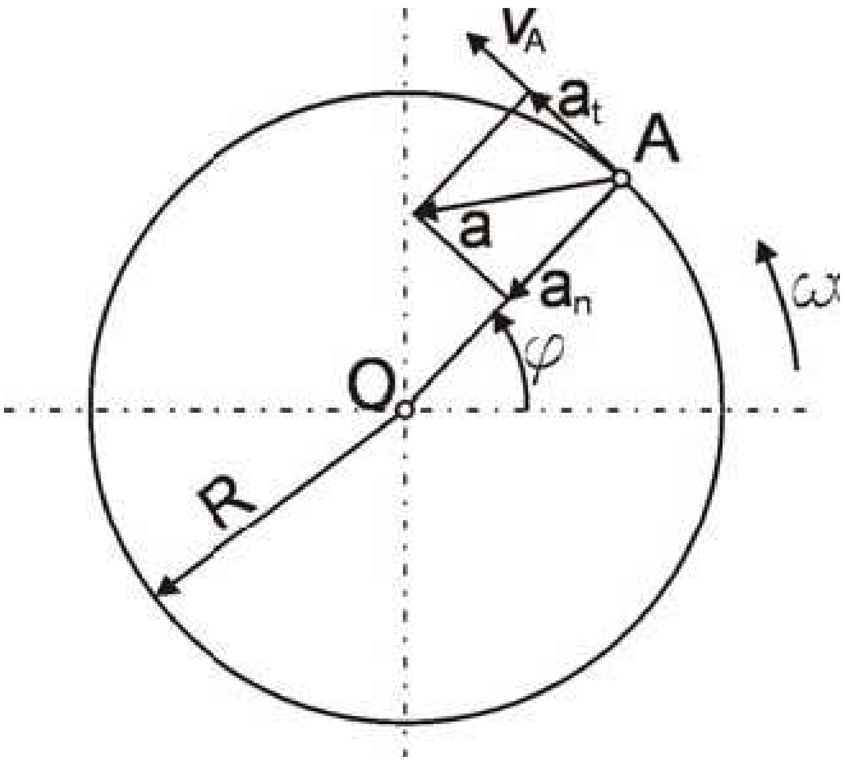
Na osnovu tangencijalnog i normalnog ubrzanja može se zaključiti o kakvom kretanju se radi:

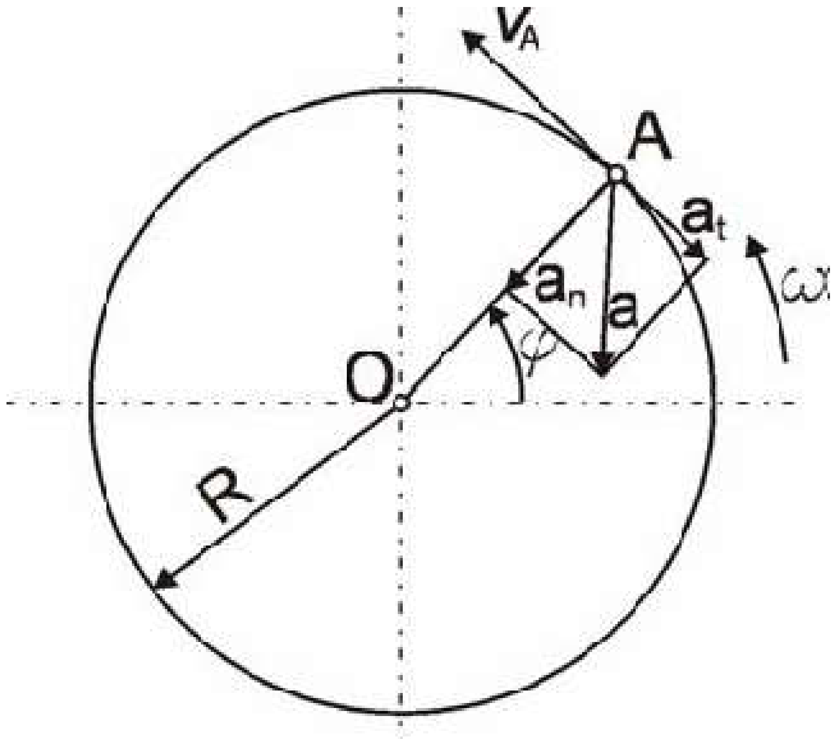
- $a_T = 0$ **jednoliko**
- $a_T = const.$ **jednakopromenljivo**
- $a_T \neq const.$ **nejednakopromenljivo**
- $a_N = 0$ **pravolinijsko**
- $a_N \neq 0$ **krivolinijsko**

Grafički prikaz jednolikog kretanja po kružnoj putanji



Grafički prikaz jednako ubrzanog (usporenog) kretanja po kružnoj putanji





Jednako ubrzano kružno kretanje

Jednako usporeno kružno kretanje

Zadaci za vežbu

Točak, prečnika 20cm, počne da se obrće stalnim ugaonim ubrzanjem od 6,28rad/s2. Kolika je brzina tačke na obodu točka posle vremena t=5s od početka kretanja?

Zamajac poluprečnika R=0,8m obrće se stalnom ugaonom brzinom 7,5rad/s. Pokretačka mašina zamajca u jednom trenutku prestane da deluje, ali se on pod uticajem inercije obrće još 24 sec. Koliko je ugaono usporenje zamajca, kao i tangencijalno usporenje tačke na rastojanju r=0,5m od centra zamajca.

Zadaci za vežbu

Точак полупречника R=10 cm креће се једнако успореним обртањем са почетном угаоном брзином ω_o=12rad/s. После t=5sec он достиже угаону брзину ω=7rad/s. Одредити обимну брзину и успорење тачке на ободу точка у тренутку истека девете секунде кретања

Zadaci za vežbu

Bubanj veš mašine se obrće ugaonom brzinom od 120 obrtaja u minuti. Po isključivanju, on se zaustavlja nakon 20 sekundi.
Odrediti broj punih obrtaja (N), koje bubanj napravi do zaustavljanja.

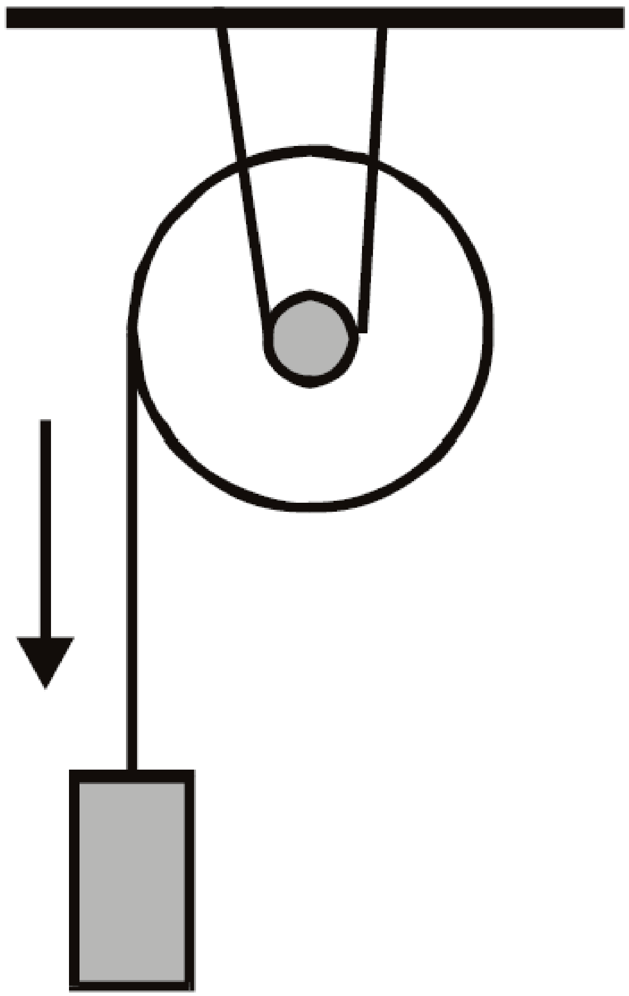
Bubanj veš mašine pri centrifugiranju iz mirovanja počinje da ubrzava ugaonim ubrzanjem 2rad/s2.
Odrediti koliko punih obrtaja (N) napravi bubanj pre nego što dostigne brzinu obrtanja od 5 obrtaja u sekundi?

Zadatak

Teret je okačen o kraj užeta, koje je namotano na kotur (prečnika 30cm) i kreće iz stanja mirovanja jednako ubrzano pri čemu izaziva obrtanje doboša. Za prve 3sec kretanja doboš načini 9 obrtaja.

Odrediti:

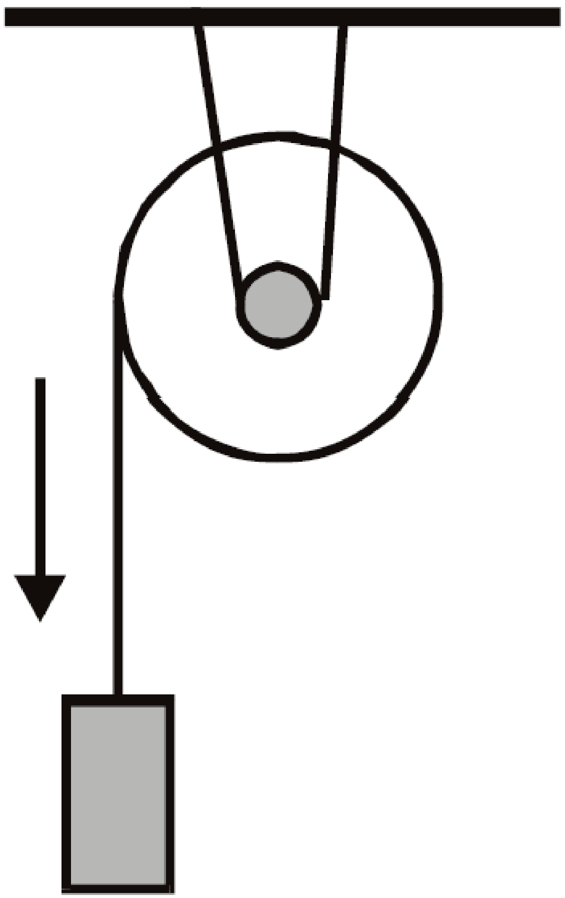
- Brzinu i ubrzanje tačke na obodu kotura na kraju pete sekunde
- Brzinu i ubrzanje tereta na kraju pete sekunde



Zadatak

Oko nepomičnog kotura poluprečnika 35 cm namotano je uže na čijem kraju visi teg. Teg prvo miruje, a onda počinje da pada ubrzanjem od 2,5m/s2 pri čemu se uže odmotava.

- kolika je ugaona brzina kotura i obimna brzina na obodu kotura u času kad je teg prešao put 10m.
- koliko je ubrzanje tačke na obodu točka, a koliko ubrzanje tega



Uporedni pregled jednačina pravolinijskog i kružnog kretanja tačke

	Праволинијско кретање тачке	Кружно кретање тачке
Једнолико кретање	* $v = \text{const.}$ * $s = v \cdot t$ * $a = 0$ * $v = \dfrac{s}{t} = \text{const.}$ * $t = \dfrac{s}{v}$	* $\omega = \text{const.}$ * $\varphi = \omega \cdot t$ * $\alpha = 0$ * $v = R \cdot \omega = \text{const.}$ * $v = \dfrac{R\pi n}{30}$ * $\omega = \dfrac{\pi n}{30}$ * $s = R\varphi$

	Праволинијско кретање тачке	Кружно кретање тачке
Једнакопроменљиво кретање („+“ је за једнакоубрзано, а „−“ за једнакоуспорено кретање)	* $v = v_0 \pm a t$ * $s = v_0 t \pm \frac{1}{2} a t^2$ * $\pm a = \mathrm{const.}$ * $v^2 - v_0^2 = \pm 2 a s$	* $\omega = \omega_0 \pm \alpha t$ * $\varphi = \omega_0 t \pm \frac{1}{2} \alpha t^2$ * $\pm \alpha = \mathrm{const.}$ * $\omega^2 - \omega_0^2 = \pm 2 \alpha \varphi$ * $v = R(\omega_0 \pm \alpha t)$ * $s = R(\omega_0 t \pm \frac{1}{2} \alpha t^2)$
	Величине карактеристичне за једнакоуспорено кретање	
	* $t_K = \frac{v_0}{a}$ * $s_K = \frac{v_0^2}{2a}$	* $t_K = \frac{\omega_0}{\alpha}$ * $\varphi_K = \frac{\omega_0^2}{2\alpha}$ * $s_K = R \varphi_K = R \frac{\omega_0^2}{2\alpha}$

HVALA
NA
PAŽNJI

Pitanja